Universidad de Granada
Departamento de Análisis Matemático
Asignatura: Cálculo
Primer curso de la Licenciatura de Ciencias Matemáticas

Ejercicios de evaluación

Para probar desigualdades en las que intervienen supremos o ínfimos las siguientes observaciones, aunque evidentes, pueden ser útiles. Sea $C \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto no vacío.

(I) Si queremos probar que un número real x verifica que $\sup(C) \leqslant x$, lo que tenemos que hacer es probar que x es un mayorante de C.

(II) Si queremos probar que un número real x verifica que $x \leqslant \text{ínf}(C)$, lo que tenemos que hacer es probar que x es un minorante de C.

1. Estúdiese la continuidad de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = E(x^2)$ (parte entera de x^2) para todo $x \in \mathbb{R}$.

2. Probar que si f es continua en a entonces también lo es $|f|$. Dar un ejemplo de función discontinua cuyo valor absoluto es continua.

3. Sean A, B conjuntos no vacíos de números reales. Supongamos que $a \leqslant b$ para todo $a \in A$ y para todo $b \in B$. Probar que $\sup A \leqslant \text{ínf} B$.

4. Sean A, B, conjuntos no vacíos y acotados de números reales. Definamos:
$$A - B = \{a - b : a \in A,\ b \in B\}; \quad AB = \{ab : a \in A,\ b \in B\}$$
Pruébese que $\sup(A - B) = \sup A - \text{ínf} B$ y, supuesto que $A \subset \mathbb{R}^+$ y $B \subset \mathbb{R}^+$, probar que $\sup(AB) = \sup A \sup B$.

Entrega: día 23 de octubre.